ISSN: 2775-5118 VOL.4 NO.12 (2025) I.F. 9.1

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННОГО-СОСТАВНОГО ТИПА

Муминов Ф.М. к.ф.м.н. доцент
Алмалыкский Государственный технический институт

В односвязной области D, ограниченной гладкой линией σ, опирающейся на точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$ расположенной в четверти плоскости $(x>0,\ y<0)$ и отрезками $AA_1,\ BE,\ A_1E$ прямых $x=0,\ x=1,\ y=1$ соответственно, где $O,\ E-$ точки с координатами $(0,0),\ (1,1)$ рассматриваются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Lu\right)=0, \tag{1}$$

где $Lu=u_{xx}+\dfrac{1-\operatorname{sgn} y}{2}u_{yy}-\dfrac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_y$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1. Функция $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $D\ (y\neq 0)$.
2. Функция $u(x,y)$ и ее частные пройзводные первого порядка непрерывны в замкнутой области (допускается, что в точках $O(0,0),\ B(1,0)$ частные производные $u_x,\ u_y$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы).
3. Функция $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям.

$$\begin{gathered} u\big|_{\sigma}=f(\xi),\ u\big|_{BE}=\psi_1(y),\ u(0,y)+u(0,-y)\big|_{AA_1}=\psi(y), \\ u_x\big|_{AA_1}=\nu(y),\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sigma}=f_1(\xi), \end{gathered} \tag{2}$$

где $f,\ f_1,\psi,\psi_1,\nu-$ заданные функции, удовлетворяющие определенным условиям гладкости и условиям согласования, причем $\psi(y)-$ четная функция.

При исследовании этих задач будем пользоваться тем фактором, что любое регулярное решение уравнение (1) представимо в виде

$$u(x,y)=z(x,y)+\mu(y), \tag{3}$$

соответственно [1-3], где $z(x,y)-$ регулярное решение уравнения

$$u_{xx}+\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_{yy}-\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_y=0. \tag{4}$$

Обозначим $\mu(y)=\begin{cases}\mu_1(y), & 0\le y\le 1,\\ \mu_2(y), & -1\le y\le 0,\end{cases}$ $\mu_2(x,y)-$ произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функция, $\mu_1(y)-$ произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.

Без ограничения общности можно предполагать $\omega(0)=\omega'(0)=0$. Предполагается, что σ целиком лежит в полосе, ограниченной прямым $x=0,\ x=1$.

Без ограничения общности можно предполагать, что $\mu(0)=\mu'(0)=0$.

На основе (3) и (2) задача 2 редуцируется к определению регулярного решение (4) в области $D\ (y\ne 0)$ удовлетворяющего краевым условиям

$$\begin{gathered} z|_\sigma=f(\xi)-\mu_2(y),\ z|_{BE}=\psi_1(y)-\mu_1(y),\\ z|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y),\ z|_{OA}=\psi(y)-\varphi(y)-\mu_2(y),\\ z_x|_{AA_1}=\nu(y),\ \frac{\partial z}{\partial\eta}|_\sigma=f_1(\xi)-\mu_1'(y)\frac{\partial y}{\partial n}. \end{gathered} \tag{5}$$

Единственность решение задачи 2 следует из принципа экстремума. (Предполагается, что $\frac{\partial x}{\partial n}\ne 0$ вдоль дуги σ).

Определим $\nu_1(x)$. Поставляя значение $\nu_1(x)$ в формулу

$$z(x,y)=\int_0^1\nu_1(t)G(x,y;t,0)dt+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\overline{f}(\theta)\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{|\xi|=1}d\theta-\int_{-1}^{0}\nu(t)G(x,y;0,t)dt$$

имеем

$$z(x,y)=\int_{3\pi/2}^{2\pi}\mu_2(\sin\theta)\rho_1(x,y;\theta)d\theta+P(x,y), \tag{6}$$

$\rho_1(x,y;\theta),\ P(x,y)-$ известные функции реализуя последнее условие из (5), для определения $\mu_2'(y)$ получаем сингулярное интегральное уравнение (3).

ISSN: 2775-5118 VOL.4 NO.12 (2025) I.F. 9.1

$$\delta(\theta_0)\sin\theta_0+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{\delta(\theta)}{\theta-\theta_0}d\theta-\frac{\sin\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{K_1(\theta,\theta_0)-K_1(\theta_0,\theta_0)}{\theta-\theta_0}\delta(\theta)d\theta+$$
$$+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{K_2(\theta,\theta_0)-K_2(\theta_0,\theta_0)}{\theta-\theta_0}\delta(\theta)d\theta+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}Q(\theta,\theta_0)\delta(\theta)\cos\theta d\theta+ \quad (7)$$
$$+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}Q_1(\theta,\theta_0)\delta(\theta)\cos\theta d\theta=\rho_2(\theta_0),$$

где $\delta(\theta)=\mu_2'(\sin\theta);\ K_1(\theta,\theta_0),\ K_2(\theta,\theta_0),\ Q(\theta,\theta_0),\ Q_1(\theta,\theta_0)-$ известные функции.

Из уравнение (7) определим функцию $\mu_2(y)$. Таким образом, функция $u(x,y)$ полностью определяется в области D_2.

Решение уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$z\big|_{BE}=\psi(y)-\mu_1(y),\ z\big|_{OB}=\tau(x),\ z_x\big|_{A_1B}=\nu(y)$$

определяется по формуле

$$z(x,y)=\int_0^y\nu(t)\overline{G}(x,y;0,t)dt-\int_0^y[\psi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_\xi(x,y;1,t)dt-$$
$$-\int_0^y\nu(t)\overline{G}(x,y;t,0)dt, \quad (8)$$

где $\overline{G}(x,y;\xi,\eta)-$ функция Грина.

Функция $z(x,y)$, определенная формулой (2) должна удовлетворять условию $z\big|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y)$,

$$\varphi(y)-\mu_1(y)=\int_0^y\nu(t)\overline{G}(0,y;0,t)dt-\int_0^y\tau(t)\overline{G}(0,y;t,0)dt-$$
$$-\int_0^y[\psi(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_\xi(0,y;1,t)dt. \quad (9)$$

Реализуя условие $z\big|_{OA_1}=\psi(y)-\varphi(-y)-\mu_2(y)$ имеем

$$\psi(y)-\varphi(y)-\mu_2(y)=\int\mu_2(\sin\theta)\rho_1(0,y,\theta)d\theta+P(0,y). \quad (10)$$

Поставляя значение $\varphi(y)$ в формулу (9) для определения $\mu_1(y)$, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\mu_1(y)+\int_0^y K(y,t)\mu_1(t)dt = P_2(y), \tag{11}$$

где $K(y,t),\ P_2(y)-$ известные функции.

Из уравнения (11) единственным образом определяется функция $\mu_1(y)$.

Литература

1. Врагов В Н. Об одном уравнении смешанно-составного типаУ/Дифферснц. уравнения, 1973.-Т. 9,№1.-С. 169-171.
2. . Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. “Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешенного типа ”CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES. 02 Issue:04/Aprel 2021 ISSN:2660-5309
3. Муминов Ф.М.,Каримов С.Я.Краевые задачи для эллиптико-параболических уравнений. Oriental Renaissance: Innovative,educational, natural and social sciences (E)ISSN: 2181-1784 5(1), Jan., 2025 Research BIB / Index Copernicus www.oriens.uz