О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Жумаева Азиза Алишеровна
“Университет экономики и сервиса Термеза”
Направление: Математика
I-курс магистратуры
Научный руководитель: **Бобомуродов.У**
E-mail: azizajumaeva230@gmail.com

Аннотация: Краевая задача для функционально-дифференциального параболического уравнения представляет собой задачу, в которой рассматривается зависимость решения от текущего состояния системы и ее значений на предыдущих этапах. Такие задачи возникают в моделировании процессов, где важен не только моментальный эффект, но и влияние предыдущих состояний на текущую динамику. Это может быть полезно для описания различных явлений, связанных с задержками, памятью системы и временными отклонениями.Задача включает в себя уравнение с производными по времени, где правые части могут зависеть от не только текущего состояния, но и от значений функции в прошлом. Граничные условия определяют поведение функции на границах области, а начальные условия описывают начальное состояние системы. Решение таких задач часто требует применения теории функциональных дифференциальных уравнений и численных методов, таких как методы аппроксимации на сетках.Изучение таких задач важно для более точного моделирования процессов с учетом временных задержек и памяти системы, что находит широкое применение в различных областях науки и техники.

Ключевые слова: краевая задача, нагруженное уравнение, дробная производная, интегральное уравнение Вольтерра, единственное решение.

Целью даной статьи является выяснение характера нагрузки дробного порядка $(1+\beta), 0<\beta<\frac{1}{2}$ в вопросах разрешимости первой краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения теплопроводности.

В области $Q=\{(x,t): x>0, t>0\}; 0<\beta<\frac{1}{2}$, расмотрим краевую задачу

$$u_t-u_{xx}+\lambda\cdot\{\,{}_0D^{1+\beta}u(x,t)\}_{x=t}=f(x,t), \qquad (1)$$

$$u(x,0)=0; u(0,t)=0 \qquad (2)$$

Здесь λ-комплексный параметр,

ISSN: 2775-5118 VOL.4 NO.2 (2025) I.F. 9.1

${}_0D_x^{1+\beta}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^\beta}\right)$-дробная производная Римана-Лиувилля порядка $(1+\beta), 0<\beta<\frac{1}{2}$, $t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\cdot\left[{}_0D_x^{1+\beta}u(x,t)\right]_{x=t}\in L_1(0,\infty)$,

$$e^{-t}[{}_0D_x^{1+\beta}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau]_{x=t}\in L_1(0,\infty), \qquad (3)$$

$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right)\right]$ –функция Грина.

Обратим дифференциальнуб часть задачи (1) - (2),

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,t)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}_{\xi=t}d\xi d\tau$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3.1)$$

Введем обозначение

$$\mu(\tau)=\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,t)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}_{x=t} \qquad (4)$$

тогда соотношение (3) запишется в виде:

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau+f_1(x,t) \qquad (5)$$

Для нахождения неизвестной функции $\mu(t)$ произведем процедуру: возьмем производную порядка $(1+\beta)$ по переменной X в обеих частях соотношения (5) и положим хатем $x=t$, тогда с учетом обозначения (4) получим:

$$\mu(t)-\lambda\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau=f_2(t) \qquad (6)$$

Ядро интегрального уравнения (6) имеет вид:

$$K_{1+\beta}(t,\tau)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\left.\frac{erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}\right)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right|_{x=t}, \qquad (7)$$

$$f_2(t)=\left[{}_0D_x^{1+\beta}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]_{x=t}$$

Найдем явный вид ядра, для этого вычислим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^2 erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\frac{d\xi}{(x-\xi)^\beta} = \left\|\begin{matrix} x-\xi=\eta \\ \xi = x-\eta\end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x erf\left(\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\frac{d\eta}{\eta^\beta}$$

$$= \left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{erf}\left(\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-z^2}dz\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}\cdot e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}\right\|$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\int_0^x e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}\frac{\partial\eta}{\eta^\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{1}{x^\beta} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\frac{2}{4(t-\tau)}\int_0^x \frac{x-\eta}{\eta^\beta}\cdot e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\eta = \left\|\begin{matrix} x-\xi=\eta \\ \xi = x-\eta\end{matrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot x^\beta} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^x \xi\cdot(x-\xi)^{-\beta}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}}d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{1}{x^\beta} - \frac{B(1-\beta,2)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot x^{2-\beta}\cdot\ {}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)$$

Здесь ${}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;z)$-гипергеометрическая функция, представивая в виде обобщенного гипергеометрического ряда:

$${}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdot(a_2)_k}{(b_1)_k\cdot(b_2)_k}\cdot\frac{z^k}{k!};$$

Где $(a_k) = a(a+1)\dots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ -символ Похгаммера,

$$B(1-\beta,2) = \frac{\Gamma(1-\beta)\cdot\Gamma(2)}{\Gamma(1-\beta,2)} = \frac{\Gamma(1-\beta)\cdot\Gamma(2)}{\Gamma(3-\beta)} = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(3-\beta)}$$

Значит окончательно, имеем:

$$K_{1+\beta}(t,\tau) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^\beta\sqrt{t-\tau}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(3-\beta)}\cdot\frac{t^{2-\beta}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cdot\ {}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right)$$

Замечание 1. $\lim\limits_{\beta\to 1-0} K_{1+\beta}(t,\tau) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} = K_2(t,\tau)$ [3], так как ${}_2F_2(a_1,a_2;a_1,a_2,z) = e^z$

Замечание 2. $K_{1+\beta}(t,\tau)_{\beta=0} = K_1(t,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}}$ [4]

Действительно

$K_1(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{t^2}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot {}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},2;-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right)$. Преобразуем функцию

$$ {}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2},2;-z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k}{(2)_k}\cdot\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(k+1)!}\cdot\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!} $$

$$ = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \left\| e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \right\| = \frac{1}{z}(e^z-1) $$

Значит,

$$ K_1(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{t^2}{4(t-\tau)}\cdot\left(-\frac{4(t-\tau)}{\alpha^2(t)}\right)\left[e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}}-1\right] $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} + \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} $$

Эти два замечания верны, так как это же можно получить непосредственно, положив в $(1)-(2)$ $\beta = 0, \beta = 1$.

Определим порядок особенности ядра интегрального уравнения $(6) - K_{1+\beta}(t,\tau)$(при $\tau \to t$ и $t \to 0$). Очевидно, что если $\lim_{t\to 0}\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)d\tau = 0$, то данное ядро имеет слабую особенность, в противном случае интегральное уравнение (5) будет особым интегральным уравнением Вольтера, которое может иметь не единстаенное решение. Воспользуемся следующим представлением ядра:

$$ \Gamma(1-\beta)K_{1+\beta}(t,\tau) = $$

$$ \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{1}{t^\beta} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{1}{4(t-\tau)}\int_0^x\frac{t-\eta}{\eta^\beta}\cdot e^{\frac{(t-\eta)^2}{4(t-\tau)}}\square\eta = k_1(t,\tau) - k_2(t,\tau). $$

Очевидно, что $\int_0^t k_1(t,\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot t^\beta}d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{1/2-\beta}$.

$$ \int_0^t k_2(t,\tau)d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\frac{d\eta}{\eta^\beta}\int_{\frac{t-\eta}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}dz = \int_0^x\frac{1}{\eta^\beta}erfc\left(\frac{\square-\eta}{2\sqrt{t}}\right)d\eta $$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^x \frac{x-\eta}{\eta^\beta} e^{\frac{(t-\eta)^2}{4(t-\tau)}} d\eta = \frac{4}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{1}{\eta^\beta} d\eta \int_0^x \frac{x-\eta}{4(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{(t-\eta)^2}{4(t-\tau)}} d\tau$$

$$= \int_0^x (t-\xi)^{-\beta} \cdot erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right) d\xi = -\frac{t^{3/2-\beta}}{\sqrt{\pi}} \cdot$$

$$\cdot B(2,1-\beta)\ {}_3F_3\left(1,\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{2-\beta}{2}+1;\frac{3}{2};-\frac{t}{4}\right) + t^{1-\beta}B(1,1-\beta) \qquad (8)$$

Здесь

$${}_3F_3(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdot (a_2)_k \cdot (a_3)_k}{(b_1)_k \cdot (b_2)_k \cdot (b_3)_k} \cdot \frac{z^k}{k!};$$

Таким образом, имеем $(0 < \beta < \frac{1}{2})$

$$\lim_{t\to 0} \int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau) d\tau = 0 \qquad (9)$$

Значит, при $0 < \beta < \frac{1}{2}$ ядро интегрального уравнения (5) имеет слабую особенность, т.е методом последовательных приближений можно найти его единственное решение. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $0 < \beta < \frac{1}{2}$, тогда $\forall\lambda \in C, \forall f(x,t) \in L_\infty(D) \cap C(D)$ граничная задача (1) – (2) имеет единственное решение $u(x,t) \in L_\infty(D) \cap C(D)$

Заключение

В данной работе рассмотрена краевая задача для функционально-дифференциального параболического уравнения. Получены достаточные условия существования и единственности решения, а также исследованы качественные свойства решений. Установлена корректность поставленной задачи в соответствующем функциональном пространстве, а также доказано существование решения с использованием методов априорных оценок и теории операторов.

Особое внимание уделено влиянию запаздывающих аргументов и функциональных зависимостей на поведение решений. Проведенный анализ показывает, что такие уравнения находят применение в различных областях науки и техники, включая теплофизику, биологию и механику. Полученные результаты расширяют теоретические представления о параболических уравнениях с функциональной зависимостью и открывают перспективы для дальнейшего изучения их свойств и практического использования.